**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUADALAJARA Y RED DE EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR DE LA RCO-ANUIES**

**TERCER CONCURSO DE MATEMÁTICAS 2020**
**PROBLEMARIO**

**Problema 1.** De un papel cuadriculado se recorta un cuadrado grande y se colorean de azul los 52 cuadritos que quedaron en la orilla. ¿Cuántos cuadritos quedaron sin colorear?

**Solución 1.** El cuadrado tiene 4 lados iguales. Los cuadritos de las esquinas tienen dos lados en el perímetro del cuadrado grande, por lo que el perímetro del cuadrado grande es de 56 lados de cuadrito. Cada lado del cuadrado grande tiene 56 entre 4 = 14 cuadritos de longitud. Si quito las orillas de cada lado, me queda dentro un cuadrado de 12 cuadritos de longitud, que está relleno de 12 x 12 = **144** cuadritos que quedaron sin colorear.

**Problema 2.** Lupita marca un número de dos dígitos en su calculadora, lo multiplica por 3, le suma 12 y divide el resultado entre 7. El número que muestra como resultado la calculadora es de dos dígitos y termina en 5. ¿Cuál fue el número que marcó Lupita?

**Solución 2.** Haciendo las operaciones contrarias, el número que marcó Lupita se puede recuperar multiplicando el resultado □5 por 7 restando 12 y dividiendo todo eso entre 3.

$$\frac{\square 5 \times 7 - 12}{3} = n < 100$$

Como 12 es múltiplo de 2, también el producto □5 por 7 debe serlo. Pero como 7 no es múltiplo de 3, el que debe ser divisible es el resultado □5. Los únicos dígitos que hacen esto posible son el 1, 4 y 7, sólo que el 4 y el 7 nos dan un número n con tres dígitos. Por lo tanto, el único resultado posible fue 15, y para eso el número que marcó Lupita fue $\frac{15 \times 7 - 12}{3} =$ **31**

**Problema 3.** El edificio en donde vivo tiene 5 pisos y se quiere pintar cada piso de azul o blanco con la condición de que no haya dos pisos seguidos pintados de azul. ¿Cuántas formas hay de lograrlo?

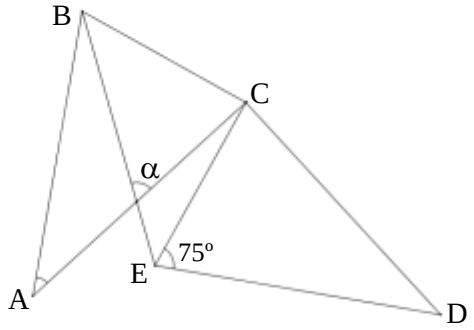
**Solución 3.** $\underline{1}$ forma es que escojan todo blanco (B). Si escogen un piso azul (A), no hay problema con la restricción y podría ser cualquiera de los cinco pisos: hay $\underline{5}$ formas de hacerlo. Si se quieren dos pisos azules es necesario acomodar el bloque ABA o ABBA o ABBBA. El primero de estos bloques se puede empezar desde arriba o en medio o hasta abajo: van $\underline{3}$ formas más. El segundo bloque sólo se puede acomodar hasta arriba o hasta abajo; $\underline{2}$ formas. El último bloque ocupa todo el edificio: $\underline{1}$ forma de pintarlo. Si se quieren tres pisos azules, hay $\underline{1}$ forma más: ABABA. Ya no se pueden pintar cuatro pisos azules, porque quedarían al menos dos juntos. En total hay **13** formas de pintar el edificio con esas condiciones.

**Problema 4.** Encuentra un número de 4 dígitos que cumpla con las tres condiciones:

a) La suma de los cuadrados del primer y cuarto dígito sea 13.
b) La suma de los cuadrados de los números centrales sea 85.
c) Si al número buscado se le resta 1089 se obtenga un número que se escriba con los mismos dígitos, pero en orden contrario.

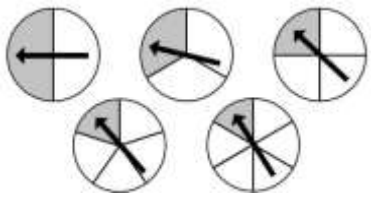
**Solución 4.** Considerando la lista de los cuadrados de los dígitos: 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81; la única parea de cuadrados que suma 13 es 4 + 9. Por otro lado, el 85 se puede hacer con dos parejas: 49 + 64 y 81 + 4. El inciso c) me da la pista de que las unidades son más pequeñas que las unidades de millar, puesto que el número invertido es más pequeño. Por ahora sé que el número se ve como 3□□2. Al empezar la resta con el número invertido, se transforma el 2 en 12 y el dígito de las decenas pierde una decena. La diferencia del dígito de las centenas menos el de las decenas era 1, pero queda en 0, porque la resta anterior tomó prestada una centena. O sea, que la pareja que hace esto posible es 6 y 7. El número original era el **3762**.

**Problema 5.** El triángulo CDE se obtiene rotando 90º el triángulo ABC en contra de las manecillas del reloj, manteniendo fijo el punto C. Si el ángulo ∠CED mide 75º y ∠BAC=40º, calcula la medida del ángulo $\alpha$.




**Solución 5.** El triángulo BCE es recto (por el ángulo de la rotación) y es isósceles, porque el lado CE corresponde al BC después de rotar. El ángulo ABC era el correspondiente a CED, así que también mide 75º. Esos 75º quedaron partidos en 45º y 75º – 45º = 30º. ∠ABE = 30º. El ángulo buscado es exterior al triángulo ABF (siendo F la intersección de AC con BE) y su medida es la suma de los otros dos ángulos interiores: 30º + 40º = **70º**. (Se puede obtener de muchas formas, como con la suma de los ángulos del triángulo BCF o ECF).

**Problema 6.** Vas a organizar un concurso en el que el participante girará tres ruletas y si en las tres ruletas cae la flecha en la sección sombreada, le das premio. ¿Cuáles ruletas escogerías de manera que el total de secciones en las tres ruletas sea 10 y la probabilidad de dar premio sea mínima? Puedes escoger ruletas de 2, 3, 4, 5 o 6 secciones con una de ellas sombreada. Puedes escoger varias ruletas iguales.

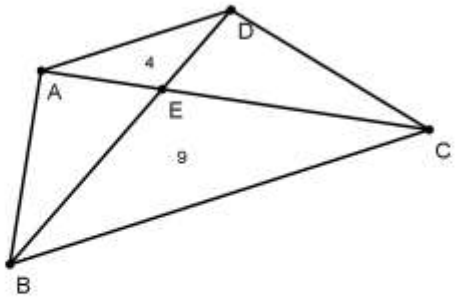


**Solución 6.** Las maneras de sumar 10 secciones con tres ruletas son: 2, 3, 5; 2, 4, 4; 3, 3, 4 y 2, 2, 6. Como sólo una de las secciones de cada ruleta está sombreada, la probabilidad será el producto de los inversos de esos tres números y la probabilidad será menor cuando el producto de las ternas sea mayor: **3, 3, 4** da una probabilidad de 1/36 de dar premio.

**Problema 7.** ¿Para qué valores de n, el dígito de las unidades de la suma 1! + 2! + 3! + ... + n! NO es 3? (El símbolo [!] es el "factorial" y se define así: a! = a × (a-1) × ... × 3 × 2 × 1).

**Solución 7.** A partir del 5! todos los términos de la serie terminan en 0 y no modificarán al dígito de las unidades. 1! termina en 1, así que n=1 es una posible solución. 1! + 2! termina en 3, no sirve. Los 3 que llevamos + 3! termina en 9, así que n=3 también es solución. 9 + 4! termina en 3, y a partir de ahí, siempre terminará en 3. Sólo hay dos posibles valores de n = **1 y 3**.

**Problema 8.** En el siguiente trapecio, las áreas de los triángulos ADE y BEC son respectivamente $4cm^2$ y $9cm^2$. Además, se conoce la medida de dos segmentos: AD = 4cm y BC = 6cm.
¿Cuál es el área del trapecio?




Solución 8. El triángulo ADE tiene área 4 y base 4, por lo que su altura es de 2. El triángulo EBC tiene área 9 y base 6, por lo que su altura es 3. La altura de todo el trapecio es igual a la suma de las alturas de estos dos triángulos 2 + 3 = 5. El área del trapecio se puede obtener con la semisuma de sus bases por la altura, y da 10 ÷ 2 x 5 = **25 $cm^2$**.

**Problema 9.** Miguel y Luis no tienen nada que hacer, así que se ponen a jugar a lo siguiente: meten en una caja 2008 palillos y los van a ir sacando por turnos, tomando de forma alternada 1, 2, 3, 4 y 5 palillos. Por ejemplo. Luis empieza tomando 4 palillos, luego Miguel toma 5, luego Luis toma 1, Miguel 2, y así sucesivamente. Gana el jugador que tome el último palillo. Si inicia Miguel, ¿cuántos palillos debe tomar en el primer turno para asegurar la victoria? (En el último turno el que termina los palillos saca los que hay, aunque no sea el número que toca).

**Solución 9.** Cada 5 turnos toman 15 palillos. Pero el siguiente grupo de 5 turnos lo empieza el otro jugador. Con 2008 palillos pueden tomar 133 grupos de 5 turnos y sobran 13 palillos. Le toca a Luis, porque es turno par. En tres turnos no pueden terminar porque máximo podrían toma 3 + 4 + 5 = 12 palillos. En seis turnos no pueden terminar porque lo mínimo que se puede tomar es 16. Terminarán en 4 o 5 turnos. Sólo si terminan en 4 turnos ganará Miguel (esos últimos cuatro turno serían de LMLM). La única forma de sumar 13 con cuatro números del ciclo es 3 + 4 + 5 + 1. Así que cada grupo de 5 turnos debe empezar en **3**, incluyendo el primero.

**Problema 10.** Las medidas de los ángulos de un polígono convexo están en secuencia aritmética. El menor de ellos mide 129º y el mayor 159º. ¿Cuántos lados tiene el polígono?

**Solución 10.** El promedio de los ángulos menor y mayor es (129 + 159)/2 = 144. El promedio de la suma de los ángulos de un polígono es 180(n-2)/n. Si igualo esta expresión con el 144 y despejo la n, de la ecuación lineal resultante, queda que n = **10 lados**.

**Problema 11.** Escribe en cada recuadro uno de los dígitos del 1 al 9, sin repetir, de manera que ambas equivalencias sean ciertas. La primera equivalencia es una simplificación de la raíz y debe ser irreducible el resultado de la derecha. Además, el último recuadro (abajo a la derecha) no debe ser un cuadrado perfecto.

$$\sqrt{\square\square} = \square\sqrt{\square}$$
$$\sqrt{\square\square} = \square$$

**Solución 11.** El dígito del radicando al final de la primera equivalencia debe ser 2, 3, 5, 6 o 7. El dígito que multiplica a esa raíz debe ser 2, 3, 4, 5, 6, 7 porque si fuera mayor, el radicando del lado izquierdo sería de más de dos dígitos. Cuidando que esto no suceda y que no se repitan dígitos al completar la primera equivalencia, probé todas las combinaciones y las posibilidades fueron, en orden en el que van escritos los dígitos: 18, 3, 2; 54, 3, 6; 80, 4, 5; 98, 7, 2. Ahora comparo cada una de las opciones con los cuadrados posibles de la segunda equivalencia, que son 49, 7 y 64, 8, ya que el segundo número no debe ser cuadrado perfecto y no se deben repetir dígitos. La única respuesta posible es **1,8, 3, 2; 4,9, 7**.

**Problema 12.** Utilizando una vez cada uno de los dígitos del 1 al 8, forma cuatro coordenadas que sean los vértices del mayor cuadrado posible. Contesta ¿Cuánto mide su lado?

A(__, __), B(__, __), C(__, __), D(__, __).

**Respuesta 12.** Raíz de 5, unas coordenadas posibles son (1, 4), (3, 8), (7, 6) y (5, 2), las demás son transformaciones de éstas.